

令和 6 (2024) 年度
広島大学一般選抜 後期日程

理学部 物理学科

(総合問題)

令和 6 年 3 月 12 日

自 9 時 00 分

至 11 時 30 分

答案作成上の注意

1. 試験開始の合図があるまでは、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. この問題冊子は、本表紙を含めて、6 枚 (11 ページ) です。
3. 解答用紙は 7 枚、下書き用紙は 3 枚です。
4. 問題は [I]～[IV] の 4 問です。全問に解答すること。
5. すべての解答用紙の所定の場所に、受験番号を必ず記入すること。
6. 解答は、すべて対応する解答用紙に記入すること。
7. 配付した解答用紙は、持ち出さず、すべて提出すること。
8. 試験終了後、問題冊子と下書き用紙は持ち帰ること。
9. 解答用紙の注意事項もよく読むこと。

このページは白紙です。

[I]

問 1. 次の関数において, 導関数 $\frac{df(x)}{dx}$ を求めよ。

(1) $f(x) = e^{ax}$

(2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

(3) $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

(4) $f(x) = \tan \frac{1}{2x}$

問 2. $x_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \, d\theta$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) のとき, 次の問いに答えよ。

(1) x_0, x_1 を求めよ。

(2) n が 2 以上の整数であるとき, $x_n = \frac{n-1}{n} x_{n-2}$ であることを示せ。

(3) n が 1 以上の整数であるとき, $nx_n x_{n-1}$ の値を求めよ。

(4) 数列 $\{x_n\}$ は単調減少する数列であることを示せ。

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} x_n$ を求めよ。

[Ⅱ]

なめらかな水平面上で、速度 $\vec{v}_A$ で運動する質量 m_A の小物体 A が、静止している質量 m_B の小物体 B に弾性衝突する場合を考える。図 1 のように、衝突後、小物体 A と B はそれぞれ速度 $\vec{v}'_A$ と $\vec{v}'_B$ で等速直線運動したとする。なお、小物体は回転しないものとする。

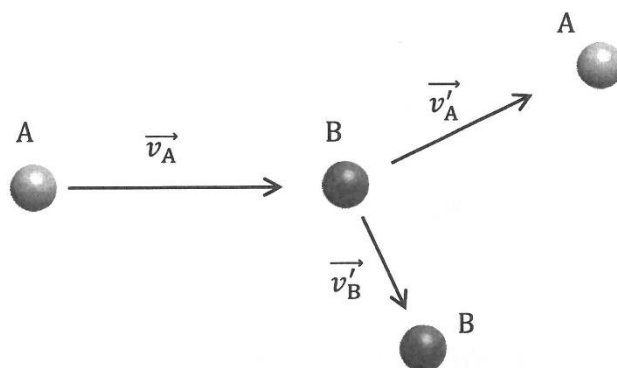


図 1

問 1. はじめに、小物体 A と B の衝突における重心の運動について考える。衝突前と後での重心の速度を $\vec{v}_G$ および $\vec{v}'_G$ とする。衝突後の重心の速度は、

$$\vec{v}'_G = \frac{m_A \vec{v}'_A + m_B \vec{v}'_B}{m_A + m_B}$$

と表すことができる。このとき (ア) の法則より、 $\vec{v}_G = \vec{v}'_G$ となり、衝突

の前後で重心の速度は変化しない。この (ア) に入る適切な語句を記せ。

この小物体 A と B の衝突を、重心と同じ速度で移動する観測者から見た場合を考える（このような座標系を重心座標系と呼ぶ）。この場合、小物体 A と B の衝突前後での運動の様子は図 2 (a) のように観測される。この重心座標系での、小物体 A の衝突の前と後での速度はそれぞれ $\vec{w}_A$ と $\vec{w}'_A$ 、小物体 B の衝突の前と後での速度はそれぞれ $\vec{w}_B$ と $\vec{w}'_B$ で表すとする。ただし、重心座標系での小物体の速度とは、重心の速度に対する相対速度である（例えば $\vec{w}_A = \vec{v}_A - \vec{v}_G$ である）。このときの速度ベクトルの関係を表した図 2 (b) について、以下の問いに答えよ。

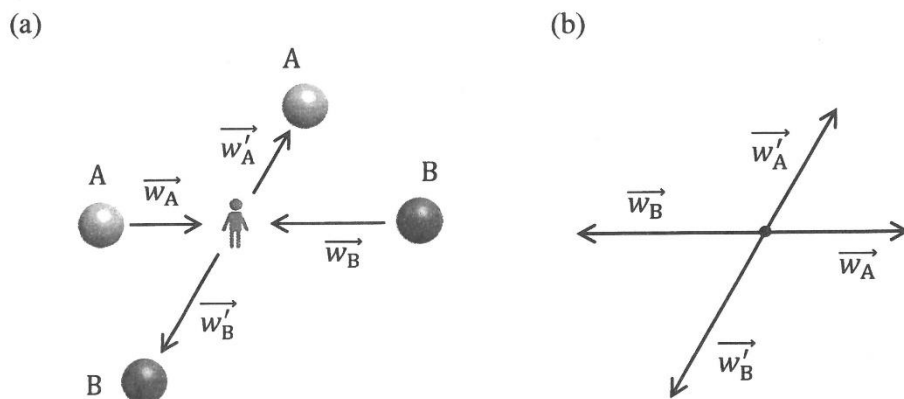


図 2

問 2. $\vec{w}_A$ および $\vec{w}_B$ を, m_A , m_B , $\vec{v}_A$ を用いてそれぞれ示せ。

問 3. 重心座標系での小物体 A と B の運動量の総和は, 衝突前と衝突後のどちらもゼロであることを示せ。

問 4. 衝突後の小物体 A と B の運動エネルギーの和は, 速度 $\vec{v}'_A$ と $\vec{v}'_B$ の大きさ v'_A と v'_B , 重心の速度の大きさ v'_G , $\vec{v}'_A - \vec{v}'_B = \vec{v}'_0$ で定義した相対速度の大きさ v'_0 を用いて以下のように書き表すことができる。

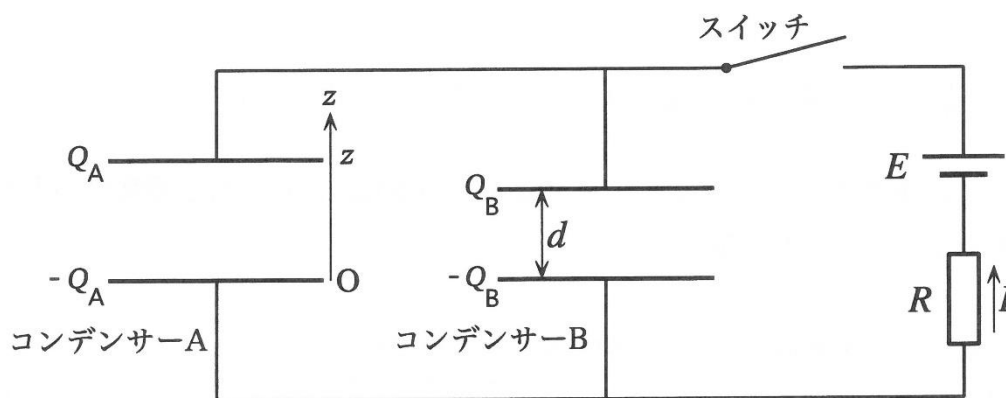
$$\frac{1}{2}m_A v'^2_A + \frac{1}{2}m_B v'^2_B = \frac{1}{2} \boxed{\text{(イ)}} v'^2_G + \frac{1}{2} \boxed{\text{(ウ)}} v'^2_0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$\boxed{\text{(イ)}}$ および $\boxed{\text{(ウ)}}$ に入る数式を記せ。

問 5. 弾性衝突では運動エネルギーが保存されることと, ①式より, 小物体 A と B の相対速度の大きさは衝突の前後で変化しないことが分かる。このことを利用して, 小物体 A と B の衝突では, 重心座標系での速度の大きさは衝突の前後で変わらない, すなわち, 小物体 A の衝突前後の速度の大きさ w_A と w'_A と, 小物体 B の衝突前後の速度の大きさ w_B と w'_B について, $w_A = w'_A$, かつ $w_B = w'_B$ であることを示せ。

[III]

図のように、二つの平行板コンデンサー A と B、起電力 $E(>0)$ の電池、抵抗値 R の抵抗、スイッチからなる回路が真空中に置かれている。コンデンサー A と B の極板の面積をそれぞれ S とする。また、コンデンサー A と B それぞれについて、図の上側の極板を正極板、下側の極板を負極板と呼ぶことにする。極板の間隔はコンデンサー B では固定されており、 d とする。コンデンサー A については、極板の間隔を変えることができる。極板面に対して垂直方向を z 軸とし、図のように負極板の位置 O を $z=0$ として正極板の位置を $z(>0)$ で表す。ただし、真空の誘電率を ϵ_0 とし、導線、極板、スイッチの抵抗および電池の内部抵抗は無視できるとする。また、コンデンサーの極板間に生じる電場は一様であり、端の効果は無視できるとする。以下の問いに答えよ。問 1 以外は導き方も記せ。



図

問 1. コンデンサー B の静電容量 C を求めよ。

まず、スイッチが開いた状態で、コンデンサー A の正極板の位置が $z=d$ のとき、コンデンサー A の正極板の電気量は $Q_A = Q(>0)$ であった。

問 2. スイッチを開いたまま、このコンデンサー A の正極板を動かした。正極板の位置が z のとき、コンデンサー A の正極板の電気量 $Q_A(z)$ と極板間の電位差 $V(z)$ 、およびコンデンサー B の正極板の電気量 $Q_B(z)$ を、 d, z, C, Q のうち必要なものを用いて表せ。

問 3. 問 2 のときの、コンデンサー A および B の静電エネルギー $U_A(z)$ 、 $U_B(z)$ それぞれを、 d, z, C, Q のうち必要なものを用いて表せ。

問4. コンデンサー A の正極板の位置を z に保つために、正極板に z 軸方向の力 $F(z)$ を加える必要がある。 $F(z)$ は、正極板の位置 z に微小な変化 Δz を与えたときの系全体の静電エネルギー $U(z) = U_A(z) + U_B(z)$ の変化から、関係式 $F(z)\Delta z = U(z + \Delta z) - U(z)$ を用いて求めることができる。力 $F(z)$ を、 d, z, C, Q のうち必要なものを用いて表せ。また、 z 軸方向に対し、力の向きは正か、負かについても述べよ。

なお、必要であれば、関数 $f(x) = \frac{x}{a+x}$ (a はゼロでない定数) について、十

分小さい Δx に対して $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \doteq \frac{a}{(a+x)^2}$ が成り立つことを用いてよい。

次に、コンデンサー A の正極板の位置が z のときに、スイッチを閉じた。

問5. スイッチを閉じた直後に抵抗 R を流れる電流 I を、 d, z, C, Q, E, R のうち必要なものを用いて表せ。

スイッチを閉じてから、十分時間が経過した。

問6. この間に、電池がした仕事 W_E を、 d, z, C, Q, E, R のうち必要なものを用いて表せ。

問7. 問6 のときの、コンデンサー A および B の静電エネルギーの変化 ΔU_A と ΔU_B それぞれを、 d, z, C, Q, E, R のうち必要なものを用いて表せ。

[IV]

放射線の一種である X 線は波長の短い電磁波であり、波動と粒子の二重性を持つ。以下の問 1～問 7 を解答するにあたり、物理定数およびその数値について、プランク定数 $h = 6.63 \times 10^{-34}$ [J・s]、光速 $c = 3.00 \times 10^8$ [m/s]、電気素量 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ [C]、電子の質量 $m = 9.11 \times 10^{-31}$ [kg] を用いよ。角度 x [rad] が微小の場合、近似式 $\sin(x) \cong x$ と $\cos(x) \cong 1$ を利用してよい。

問 1. 波長 λ_1 の X 線の運動量とエネルギーを、 λ_1 , h , c , e , m から必要な物理量を用いてそれぞれ表せ。

問 2. ある結晶に、入射 X 線（波長 λ_1 ）を入射角 α_1 で入射した際に、ブラッグ反射条件を満たし強い反射 X 線が観測された（図 1）。結晶の格子面の間隔を d_1 として、波長 λ_1 を、 d_1 , α_1 および正の整数 n を用いて表せ。

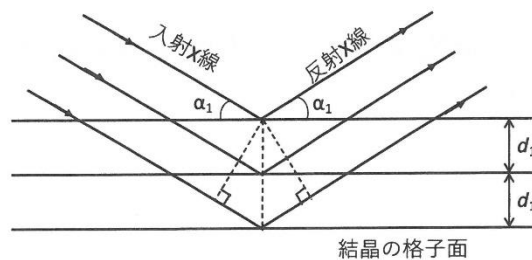


図 1 : 結晶格子による X 線のブラッグ反射の模式図。

1923 年にコンプトンは、X 線が物質に入射し散乱されると、その波長が変化することを発見した。この現象は X 線の粒子性を示し、コンプトン効果と呼ばれる。

著作権保護の観点から、公表していません。

問 3. モリブデンからの特性 X 線のエネルギーは 1.75×10^4 電子ボルト[eV]である。この特性 X 線の波長 λ を、導出方法を記した上で、有効数字 3 桁で計算せよ。その単位も記せ。なお、1[eV]は、電子 1 個を 1[V]の電圧で加速した際に得られる運動エネルギーであり、 1.60×10^{-19} [J]である。

問 4. 方解石の格子間隔 d を、導出方法を記した上で、有効数字 3 桁で計算せよ。その単位も記せ。なお、ブラッグ反射条件は $n = 1$ と想定し、ブラッグ角（回折角）は微小であるとして上述の近似式を用いてよい。

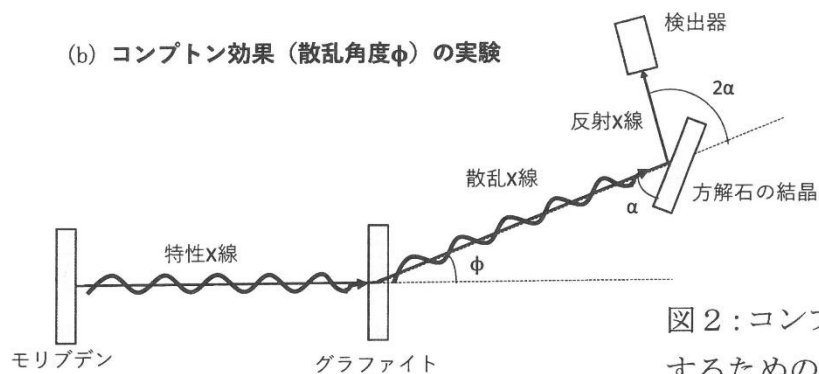
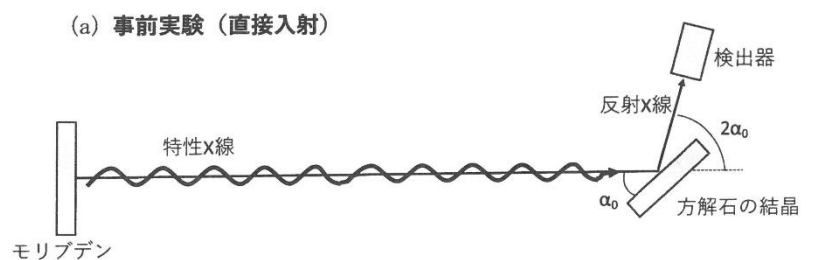


図 2 : コンプトン効果を測定するための実験の模式図。

(a)

図 3 :

著作権保護の観点から、公表していません。

著作権保護の観点から、公表していません。

(b)

著作権保護の観点から、公表していません。

(1923 年コンプトン執筆論文 (Physical Review 22 巻, 409~413 ページ) より改変)

著作権保護の観点から、公表していません。

著作権保護の観点から、公表していません。

問 5. 図 3 (b) の測定結果のグラフから、 $\Delta\alpha$ を小数点以下 2 桁まで読み取り、その数値を記せ。

問 6. 元の特性 X 線と異なる X 線の波長 λ' を、導出方法を記した上で、有効数字 3 桁で計算せよ。その単位も記せ。なお、ブラッグ反射条件は $n = 1$ と想定し、ブラッグ角は微小であるとして上述の近似式を用いてよい。

問 7. コンプトン効果では、1 個の光子と 1 個の電子が弾性衝突したと考えることができる。図 3 (b) の測定結果の場合、モリブデンの特性 X 線からグラファイトの電子が得たエネルギーを、単位[eV]で有効数字 1 桁で求めよ。導出方法も記すこと。

このページは白紙です。